ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1985

***

MATHEMATIQUES I
(4 pages dactylographiées)

M

Soit V le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des applications continues f de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ soit convergente ; soit W l'ensemble des applications continues g de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^1 g^2(x)dx$ soit convergente, le symbole g^2 désignant la fonction qui à x associe $(g(x))^2$.

PREMIERE PARTIE

I-1. Etablir que W est un sous-espace vectoriel de V (on pourra observer que, pour p et q réels, $2|pq| \leqslant p^2 + q^2$).

I-2. Montrer que, si l'on pose, pour f et g appartenant à W, $(f \mid g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, on définit dans W un produit scalaire euclidien ; W sera désormais muni de cette structure.

I-3. Etudier l'appartenance à V et l'appartenance à W des restrictions à $]0,1]$ des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto \text{Log } x$$

$$x \longmapsto x^{-\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x\,(1 - \text{Log}x)^{\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

DEUXIEME PARTIE

II-1. Soit f un élément de V. On pose, pour tout $x \in]0,1]$

$$F(x) = (\text{Log } x)\int_0^x f(t)\,dt + \int_x^1 (\text{Log } t)\, f(t)\,dt$$

où Log désigne le logarithme népérien.

a) Montrer que F(x) existe pour tout $x \in]0,1]$.

b) Montrer que F admet sur $]0,1]$ une dérivée première F' et une dérivée seconde F" continues.

c) Etablir la relation, valable pour tout $x \in]0,1]$

$$x\,F''(x) + F'(x) = f(x)$$

II-2. Soit f un élément de V, et F la fonction définie ci-dessus.

a) Quelle est la valeur de F(1) ?

b) Quelle est la limite de x F'(x) lorsque x tend vers 0 ?

c) Donner un exemple d'élément f de V tel que F ne soit pas bornée ; on pourra utiliser une fonction du type $f(x) = \frac{1}{x(1 - \text{Log } x)^{\alpha}}$ pour α convenablement choisi.

II-3. f désigne toujours un élément de V, et F la fonction définie en II-1.

a) Etablir l'existence d'une constante $A > 0$ telle que, pour tout $x \in]0,1]$, $|F'(x)| \leqslant \frac{A}{x}$.

b) Etablir que $F \in W$.

II-4. A tout élément f de V on associe ainsi F qui appartient aussi à V, ce qui définit donc une application T de V dans V, manifestement linéaire.

a) T est-elle injective ?

b) Montrer que l'image de V par T est formée des applications g de]0,1] dans $\mathbb{R}$ telles que

. g a dans]0,1] une dérivée seconde continue

. $g(1) = \lim_{x \to 0} x g'(x) = 0$

II-5. On suppose ici que f appartient à W ; T(f) a-t-elle une limite en 0 ? T(f) est-elle bornée ? On pourra établir : $\forall x \in]0,1]$, $|F'(x)| \leqslant \sqrt{\frac{(f \mid f)}{x}}$, où $F = T(f)$.

II-6. Prouver que, si f et g appartiennent à W, on a $(T(f) \mid g) = (f \mid T(g))$

II-7. Démontrer, pour tout $f \in W$, l'inégalité $(f \mid T(f)) \leqslant 0$.

Quand a-t-on $(f \mid f) = 0$?

TROISIEME PARTIE

Un élément non nul f de V pour lequel existe un réel tel que

$$T(f) = \alpha f$$

est dit un vecteur propre de T, et α est appelé la valeur propre de T associée à f ; inversement, si α est une valeur propre de T, l'ensemble des f de V tels que $T(f) = \alpha f$ est un sous-espace vectoriel de V dit sous-espace propre associé à α .

III-1. Démontrer que les valeurs propres de T, s'il en existe, sont dans l'intervalle $]-\infty,0[$ et que les vecteurs propres sont dans W.

III-2. Soit λ un réel strictement positif. Démontrer que, si f est vecteur propre de T pour la valeur propre $-\lambda$, alors l'application de $]0, \frac{1}{\lambda}[$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(\lambda x)$ est, dans son intervalle de définition, solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy'' + y' + y = 0$$

III-3. Etant donné une série entière $1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ de rayon de convergence R, déterminer les a_n pour que la fonction somme h de cette série soit, dans l'intervalle]-R, R[, solution de (E). Que vaut R ?

III-4. a) Etablir qu'il existe r_1 réel tel que $h(r_1) = 0$ et que, pour tout $x < r_1$, $h(x) > 0$. On pourra commencer par étudier le signe de $h'(x)$ sur [0,2].

b) Justifier de façon rigoureuse l'encadrement $1,4 < r_1 < 1,5$.

III-5. Soient b et c deux réels tels que $0 < b < c \leqslant r_1$.
Soit y une application de]0,c[dans $\mathbb{R}$, solution de E ; établir à l'aide de la fonction z qui à tout $x \in]0,c[$ associe $z(x) = \frac{y(x)}{h(x)}$ l'existence de deux constantes A et B telles que :

$$\forall x \in]0,c[\qquad y(x) = A\,h(x) + B\,h(x) \int_b^x \frac{dt}{t\,h^2(t)} .$$

Etudier la limite de y(x) quand x tend vers zéro.

III-6. On admet provisoirement la proposition (P) suivante :

"Soit I un intervalle ouvert inclus dans $]0, +\infty[$ et φ une solution de E dans I ; s'il existe un point x_0 de I tel que $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$, alors φ est la fonction nulle".

Déduire de ce qui précède que, si f est vecteur propre de T pour la valeur propre $-\lambda$, alors il existe μ réel tel que

$$\forall x \in]0,1[, \qquad f(x) = \mu\, h\left(\frac{x}{\lambda}\right) .$$

III-7. Soit inversement une constante $\lambda > 0$; donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $h(\frac{x}{\lambda})$ soit vecteur propre de T. Quel lien existe-t-il entre les zéros de h et les valeurs propres de T ?

III-8. Etablir qu'à chaque valeur propre de T correspond un sous-espace propre de dimension 1 et que les sous-espaces propres correspondant à deux valeurs propres différentes (en admettant l'existence de deux telles valeurs) sont orthogonaux relativement à la structure euclidienne de W.

QUATRIEME PARTIE

On se propose ici de faire une étude sommaire du comportement de la fonction h sur $\mathbb{R}_+$, et de ses zéros.

IV-1. Soit y une solution de E dans un intervalle I inclus dans $]0, +\infty[$. Mettre sous une forme aussi simple que possible les dérivées premières des fonctions qui à x associent respectivement $xy'^2(x) + y^2(x)$ et $x^2y'^2(x) + xy^2(x)$.

IV-2. a) En déduire une démonstration de la proposition (P) énoncée dans la question III-6.

b) Démontrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $x\,h'^2(x) + h^2(x)$ a une limite $L \geqslant 0$.

c) En déduire que h est bornée dans $\mathbb{R}_+$ et que $h'(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$.

IV-3. a) Etablir que les quatre intégrales suivantes, où a désigne un réel strictement positif quelconque, sont convergentes :

$$\int_a^{+\infty} h'^2(x)dx,\quad \int_a^{+\infty} h(x)h''(x)dx,\quad \int_a^{+\infty} \frac{h(x)h'(x)}{x}\,dx \text{ et } \int_a^{+\infty} \frac{h^2(x)}{x}\,dx$$

b) En déduire que $L = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).

IV-4. On suppose, dans cette seule question, qu'il existe $r > 0$ tel que $h(r) = 0$ et que, pour tout $x \geqslant r$, $h(r) \geqslant 0$.

a) Que dire du sens de variation de $x\,h'(x)$ pour $x \geqslant r$?

b) On suppose que l'on connaisse une valeur $c > r$ telle que $h'(c) < 0$; trouver une fonction majorant h sur $[c, +\infty[$ et en tirer une contradiction.

c) En déduire que h est croissante sur $[r, +\infty[$. Est-ce possible ?

IV-5. Montrer que h admet une infinité de zéros.

IV-6. Soit r un zéro de h.

a) Démontrer l'existence d'au moins un zéro de h' sur $]r, +\infty[$.

b) Soit q un tel zéro de h'. Etablir que

$$\forall x > r,\ |h'(x)| \leqslant |h'(r)|$$

En déduire une majoration de $\left|\int_r^q h(x)dx\right|$.

c) A l'aide de cette intégrale, établir l'inégalité

$$q \geqslant r + \sqrt{2r}\quad .$$

IV-7. a) Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, l'intervalle $[n, n-1[$ contient au plus un zéro de h.

b) Etablir que l'on peut ranger les zéros de h en une suite strictement croissante $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$ avec $\lim_{n \to +\infty} r_n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} (r_{n+1} - r_n) = +\infty$

c) Trouver une constante $K > 0$ telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $r_n \geqslant K n^2$

IV-8. Donner l'allure de la représentation graphique de h. On établira que, dans chaque intervalle $[r_n, r_{n+1}]$, h' s'annule une fois et une seule et que la suite qui à n associe $M_n = \max_{x \in [r_n, r_{n+1}]} |h(x)|$ est décroissante et tend vers zéro.